第７講　２次方程式・２次不等式

PART1　２次方程式の解法，実数解の個数

例題

(1)　次の２次方程式の実数解の個数を調べよ。また，実数解をもつ場合はその実数解を求めよ。

(i)　$x^2+3x+1=0$　　(ii)　$9x^2-6x+1=0$　　(iii)　$3x^2-5x+3=0$

(2)　２次方程式 $2x^2-x-m+2=0$ が実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

練習

(1) 次の２次方程式の実数解の個数を調べよ。また，実数解をもつ場合はその実数解を求めよ。

(i) $x^2-7x+8=0$　(ii) $-x^2+x-4=0$　(iii) $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$

(2) ２次方程式 $4x^2-(m+2)x+m-1=0$ が重解をもつとき，定数 m の値を求めよ。また，そのときの重解を求めよ。

第 7 講　PART1　確認問題

1　次の２次方程式の実数解の個数と，実数解をもつ場合の実数解の組合わせとして適当なものを①～④から選べ。［ア］

$x^2-4x-1=0$

①　実数解の個数　２個，実数解　$x=2\pm\sqrt{5}$

②　実数解の個数　１個，実数解　$x=2+\sqrt{5}$

③　実数解の個数　０個

④　実数解の個数　２個，実数解　$x=-2\pm\sqrt{5}$

2　次の２次方程式の実数解の個数と，実数解をもつ場合の実数解の組合わせとして適当なものを①～④から選べ。［イ］

$-x^2+x-3=0$

①　実数解の個数　２個，

実数解　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

②　実数解の個数　１個，

実数解　$x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$

③　実数解の個数　０個

④　実数解の個数　１個，

実数解　$x=-1+\sqrt{11}$

3 次の２次方程式の実数解の個数と，実数解をもつ場合の実数解の組合わせとして適当なものを①～④から選べ。［ウ］

$4x^2+12x+9=0$

① 実数解の個数　２個，
実数解　$x=\dfrac{-6\pm3\sqrt{3}}{4}$

② 実数解の個数　１個，実数解　$x=\dfrac{3}{2}$

③ 実数解の個数　０個

④ 実数解の個数　１個，実数解　$x=-\dfrac{3}{2}$

4 次の２次方程式が重解をもつとき，定数 m の値を求めよ。また，そのときの重解を求めよ。

$4x^2-(m+1)x+m-2=0$

$m=$［エ］のとき，重解 $x=\dfrac{［オ］}{［カ］}$

$m=$［キク］のとき，重解 $x=\dfrac{［ケ］}{［コ］}$

第 7 講　2 次方程式・2 次不等式

PART1　2 次方程式の解法，実数解の個数

例題

(1)　次の 2 次方程式の実数解の個数を調べよ。また，実数解をもつ場合はその実数解を求めよ。

(i)　$x^2+3x+1=0$　　(ii)　$9x^2-6x+1=0$　　(iii)　$3x^2-5x+3=0$

(2)　2 次方程式 $2x^2-x-m+2=0$ が実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　与えられた方程式の判別式を D とする。

(i)　$D=3^2-4\cdot1\cdot1=9-4=5>0$　より 2 個

実数解は $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

(ii)　$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-9\cdot1=0$　より 1 個

実数解は $x=-\dfrac{-6}{2\cdot9}=-\dfrac{-3}{9}=\dfrac{1}{3}$

(iii)　$D=(-5)^2-4\cdot3\cdot3=25-36=-11<0$　より 0 個

(2)　この方程式の判別式を D とすると

$$D=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-m+2)=8m-15$$

実数解をもつための条件は $D\geqq0$

よって $8m-15\geqq0$　より $m\geqq\dfrac{15}{8}$

練習

(1)　次の 2 次方程式の実数解の個数を調べよ。また，実数解をもつ場合はその実数解を求めよ。

(i)　$x^2-7x+8=0$　　(ii)　$-x^2+x-4=0$　　(iii)　$3x^2-2\sqrt{3}\,x+1=0$

(2)　2 次方程式 $4x^2-(m+2)x+m-1=0$ が重解をもつとき，定数 m の値を求めよ。また，そのときの重解を求めよ。

(1)　与えられた方程式の判別式を D とする。

(i)　$D=(-7)^2-4\cdot1\cdot8=49-32=17>0$　より２個

実数解は $x=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1}=\dfrac{7\pm\sqrt{17}}{2}$

(ii)　$-x^2+x-4=0$　より　$x^2-x+4=0$

$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot4=1-16=-15<0$　より０個

(iii)　$\dfrac{D}{4}=(-\sqrt{3})^2-3\cdot1=0$　より１個

実数解は $x=-\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\cdot3}=-\dfrac{-\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2)　この方程式の判別式を D とすると

$$D=\{-(m+2)\}^2-4\cdot4\cdot(m-1)=m^2-12m+20$$

重解をもつための条件は $D=0$

よって　$m^2-12m+20=0$　　$(m-2)(m-10)=0$　　$m=2,\ 10$

また，重解は $x=-\dfrac{-(m+2)}{2\cdot4}=\dfrac{m+2}{8}$ より

$m=2$ のとき 重解 $x=\dfrac{1}{2}$，　$m=10$ のとき 重解 $x=\dfrac{3}{2}$

第７講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

判別式を D とする。

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(-1)=4+1=5>0$$ [A]

よって，**実数解の個数は　2 個** [B]

実数解は　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-1)}}{1}$

$=2\pm\sqrt{5}$

[A]　2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の判別式を D とすると，

$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$

[B]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ について

$D>0 \Longleftrightarrow$ 異なる 2 つの実数解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ をもつ

$D=0 \Longleftrightarrow$ ただ 1 つの実数解（重解）$x=-\dfrac{b}{2a}$ をもつ

$D<0 \Longleftrightarrow$ 実数解をもたない

2

[正解] イ：③

[解説]

判別式を D とする。

$$D=1^2-4\cdot(-1)\cdot(-3)=1-12=-11<0$$

よって，**実数解の個数は　0 個** [C]

[C]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ について

$D>0 \Longleftrightarrow$ 異なる 2 つの実数解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ をもつ

$D=0 \Longleftrightarrow$ ただ 1 つの実数解（重解）$x=-\dfrac{b}{2a}$ をもつ

$D<0 \Longleftrightarrow$ 実数解をもたない

3

[正解] ウ：④

[解説]

判別式を D とする。

$$\frac{D}{4}=6^2-4\cdot9=36-36=0$$

よって，**実数解の個数は　1 個** [D]

実数解は　$x=-\dfrac{12}{2\cdot4}=-\dfrac{3}{2}$

[D]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ について

$D>0 \Longleftrightarrow$ 異なる 2 つの実数解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ をもつ

$D=0 \Longleftrightarrow$ ただ 1 つの実数解（重解）$x=-\dfrac{b}{2a}$ をもつ

$D<0 \Longleftrightarrow$ 実数解をもたない

4 **[正解]** **エ**：3，**オ**：1，**カ**：2，**キク**：11，**ケ**：3，

コ：2

[解説]

この方程式の判別式を D とすると，

$$D=\{-(m+1)\}^2-4\cdot4\cdot(m-2)$$
$$=m^2-14m+33$$

重解をもつための条件は $D=0$ [E]

よって　$m^2-14m+33=0$

$(m-3)(m-11)=0$　　$m=3,\ 11$

また，重解は　$x=-\dfrac{-(m+1)}{2\cdot4}=\dfrac{m+1}{8}$ より，[E]

$m=3$ のとき　重解 $x=\dfrac{1}{2}$，

$m=11$ のとき　重解 $x=\dfrac{3}{2}$

[E]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，
$D=b^2-4ac=0$ のとき
ただ 1 つの実数解（重解）
$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}=-\dfrac{b}{2a}$
をもつ